

Fach:

Mathematik

Bearbeitungszeit:

180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel:

(nicht grafikfähiger) Taschenrechner; Tafelwerk

**1. Kurvendiskussion**

Gegeben ist die Funktion  $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$   $[x \in \mathbb{R}]$ .

- 1.1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ( $S_x$  bzw.  $S_y$ ) und überprüfen Sie die Symmetrie (Achsensymmetrie / Punktsymmetrie) von  $f(x)$ .
- 1.2. Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte (E) sowie deren Art.
- 1.3. Überprüfen Sie  $f(x)$  auf Vorhandensein von Wendepunkten (W) und bestimmen Sie die Wendetangenten  $[y_t = mx + n]$ .
- 1.4. Bestimmen Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ , notieren Sie Definitionsbereich (D) und Wertebereich (W) der Funktion, berechnen Sie  $f(-3)$  sowie  $f(3)$  und zeichnen Sie den Graphen von  $f(x)$  in ein Koordinatensystem.

**2. Anwendung funktionaler Zusammenhänge**

- 2.1. Ein Unternehmen produziert  $x$  Mengeneinheiten eines Gutes. Die gesamte hergestellte Ware kann zum festen Stückpreis  $p$  verkauft werden. Die zugehörige Kostenfunktion lautet  $K(x) = 6x + x^2$ . Der maximale Gewinn hängt vom Preis  $p$  ab. Bestimmen Sie die Erlösfunktion  $E(x)$ , die Gewinnfunktion  $G(x)$  sowie den maximalen Gewinn als Funktion des Preises  $G(p)$ .
- 2.2. Der Gewinn eines Unternehmens ist eine Funktion seines Outputs  $x$ , gegeben durch
 
$$G(x) = 4000 - x - \frac{3000000}{x} \quad [x > 0].$$

- 2.2.1. Bestimmen Sie dasjenige Niveau des Outputs  $x$ , das den Gewinn maximiert.
- 2.2.2. Das tatsächliche Output variiert zwischen 1000 und 3000 Mengeneinheiten. Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn:

$$I = \frac{1}{2000} \int_{1000}^{3000} f(x) \cdot dx.$$

**3. Finanzmathematik**

- 3.1. Bei jährlicher Verzinsung erhält man aus einem Kapital von EUR 100 000 nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 6% EUR 133 822,56.
  - 3.1.1. Berechnen Sie das Endkapital, wenn stetig verzinst wird. [→ Antwortsatz]
  - 3.1.2. Berechnen Sie den Zinsindex  $I$  aus jährlicher und stetiger Verzinsung und kommentieren Sie diesen Wert. [→ Antwortsatz]

3.2. Ein Sparer legt für 48 Monate ein Anfangskapital von EUR 5 000 in einem Sparvertrag an. Der nominale Zinssatz beträgt 4% (p. a.). Die Verzinsung erfolgt monatlich, die Zinskapitalisierung jeweils am Monatsende. Am Ende der Laufzeit werden das eingezahlte Kapital und die aufgelaufenen Zinsen an den Anleger ausgezahlt.

3.2.1. Berechnen Sie den monatlichen Zinssatz ( $i_{\text{monatl.}}$ ). [→ Antwortsatz]

3.2.2. Berechnen Sie das Endkapital. [→ Antwortsatz]

3.2.3. Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz  $j$  (in %). [→ Antwortsatz]

3.2.4. Berechnen Sie das Anfangskapital, das notwendig ist, um bei jährlicher Verzinsung (statt monatlicher) das gleiche Endkapital wie in Aufgabe 3.2.2. zu erreichen. [→ Antwortsatz]

#### 4. Vermischtes

4.1. Ermitteln Sie die Lösungsmenge (L) des linearen Gleichungssystems, indem Sie für  $x_4$  einen freien Parameter  $t$  mit  $t \in \mathbb{R}$  einsetzen.

Geben Sie drei spezielle Lösungen des Gleichungssystems für  $t_1 = 0$  (→  $L_1$ ),  $t_2 = -2$  (→  $L_2$ ) und  $t_3 = 1$  (→  $L_3$ ) an.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8$$

$$x_3 - 2x_4 = 3$$

4.2. Bestimmen sie Definitionsbereich (D) und Lösungsmenge (L) folgender Gleichungen.

4.2.1.  $\frac{x-1}{x+2} + \frac{3}{x+3} = 1 - \frac{3}{(x+2)(x+3)}$

4.2.2.  $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x$

4.2.3.  $|8x-2| = 5x+3$

4.3. Bestimmen Sie  $\frac{dy}{dx}$  und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

4.3.1.  $y = f(x) = (x - x^2) \cdot e^{-2x}$

4.3.2.  $y = f(x) = 10u^2$  und  $u = 5 - x^2$

4.4. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von  $f$  mit  $y = f(x) = \sqrt{5x}$  ( $x \in \mathbb{R}_0^+$ ) an der Stelle  $b \in D_f$ .

#### 5. Integralrechnung

5.1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

5.1.1.  $\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x} \cdot dx$  ( $x \neq 0$ )

5.1.2.  $\int x \cdot \sqrt{x+1} \cdot dx$  ( $x+1 > 0$ )

5.2. Bestimmen Sie die Stammfunktion  $F(x)$ , wenn  $F'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2x$  und  $F(0) = \frac{1}{2}$ .

5.3. Berechnen Sie den Inhalt (in Flächeneinheiten  $\rightarrow$  FE) der von  $f(x) = -x^2 + 2$  und  $g(x) = (x-1)^2 - 3$  eingeschlossenen Fläche. Skizzieren Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

## 6. Statistik

6.1. Für die Kaufkraft einer Währung wurden für 6 aufeinander folgende Jahre folgende Werte ermittelt: 100; 95; 85; 80; 78; 70. Ergänzen Sie die folgende Tabelle und berechnen Sie die *durchschnittliche jährliche Kaufkraftabnahme (in Prozent)*. [ $\rightarrow$  Antwortsatz]

Kaufkraft	Kaufkraftabnahme in % (vgl. Vorjahr)	Kaufkraft in % (vgl. Vorjahr)	Kaufkraftfaktor (vgl. Vorjahr)
100			
95			
85			
80			
78			
70			

6.2. In Auswertung einer Abschlussklausur wurden die Ergebnisse der Studenten klassifiziert und in der folgenden Tabelle dargestellt:

Klasse	erreichte Punkte	Häufigkeit f	KM	KM · f
1	[1– 15]	10		
2	[16 – 30]	16		
3	[31 – 45]	22		
4	[46 – 60]	30		
5	[61 – 75]	4		

- 6.2.1. Ergänzen Sie die Tabelle und berechnen Sie den prozentualen Anteil der Studenten, die in der Klausur weniger als 46 Punkte erreicht haben.
- 6.2.2. Notieren Sie die Klassenbreite ( $c$ ) sowie die Spannweite ( $w$ ).
- 6.2.3. Berechnen Sie das arithmetische Mittel ( $\bar{x}$ ).
- 6.2.4. Bestimmen Sie die modale Klasse und berechnen Sie den Modus ( $\hat{x}$ ).
- 6.2.5. Bestimmen Sie die mediale Klasse und berechnen Sie den Median ( $\tilde{x}$ ).
- 6.2.6. Vergleichen Sie die Mittelwerte und entscheiden Sie über die Form der Verteilung.
- 6.2.7. Zeichnen Sie Histogramm und Polygonzug für diese Verteilung.